b- On choisit a_0, $\|a_0\| = 1$, $F = \mathbb{R}a_0$, on trouve $a_1 \left| \begin{array}{l} \|a_1\| = 1 \\ d(a_1, F) \geq 1 \end{array} \right.$

$= 0$, ABS

c- a_n ne possède pas de sous-suite de Cauchy et donc pas de VA

donc $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte

IX Connexité :

A) généralités

Déf : Soit (X, d) un e-m. Les props suivantes sont équivalentes

a- Si $X = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 des ouverts et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$

b- Si $X = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$

c- Si A est une partie de X qui est à la fois ouverte et fermée alors $A = \emptyset$ ou $A = X$

d- Si f est une fonction $\mathcal{C}^0 : X \to \{0, 1\}$, alors f est constante

Si X vérifie l'une de ces conditions, X est dit connexe.

D/ $a \Rightarrow b$: Soit $\left. \begin{array}{l} O_1 = X \setminus F_1 \\ O_2 = X \setminus F_2 \end{array} \right\}$ O_1 et O_2 sont ouverts $(O_1 \cup O_2)^c = F_1 \cap F_2 = \emptyset$ $(O_1 \cap O_2)^c = F_1 \cup F_2 = X$

de là, l'un de O_1, O_2 est vide et par suite l'un de F_1, F_2 aussi

$b \Rightarrow c$: $F_1 = A$, $F_2 = A^c$ vérifient b) : $A = \emptyset$ ou $A^c = \emptyset$ OK

$b \Rightarrow d$: On regarde $F_1 = f^{-1}(\{0\})$, $F_2 = f^{-1}(\{1\})$

Par $\mathcal{C}^0$ F_1 et F_2 sont fermés, donc $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$, f est cste.

d) ⇒ c) : On pose $\begin{cases} f(x)=0 & \text{si } x\in O_1 \\ f(x)=1 & \text{si } x\in O_2 \end{cases}$ comme O_1 et O_2 sont ouverts, f est $\mathcal{C}^0$

f est alors cste, donc l'un de O_1, O_2 est vide

c) ⇒ a) ; $O_1 = A$, $O_1^c = O_2$ ouvert, O_2 est fermé ✓

<u>Prop</u>: Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une partition de l'espace connexe des ouverts de X. Il existe alors au plus un indice i_0 tq $\Omega_{i_0}\neq\emptyset$ (très très utile)

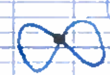
<u>Dém</u>: Soit i_0 tq $\Omega_{i_0}\neq\emptyset$. Introduisons $\Omega = \bigcup_{i\neq i_0}\Omega_i$

On a $\Omega_{i_0}\cup\Omega = X$, comme $\Omega\cap\Omega_{i_0}=\emptyset$

et Ω, Ω_{i_0} ouverts, il vient $\Omega=\emptyset$ donc $\forall i\neq i_0$ $\Omega_{i}=\emptyset$

<u>Déf</u>: Une partie A de X (Evn) est dite connexe lorsqu'elle est connexe pour la Topologie trace de X.

<u>Prop</u>: si A est une partie connexe alors $\bar{A}$ aussi ($\mathring{A}$ → faux)



D/ Soit $f:\bar{A}\to\{0,1\}$ une fonction $\mathcal{C}^0$

donc elle est continue sur A par restriction

or A est connexe donc f est cste sur A. Par densité de A dans $\bar{A}$ et $\mathcal{C}^0$ def, f est cste sur $\bar{A}$

<u>Th</u>: Soit $f\in\mathcal{C}(X,Y)$, si A est une partie connexe de X, $f(A)$ est une partie connexe de Y

D/ Soit $g : f(A) \to \{0,1\}$ $\mathcal{C}^0$, alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^0$ sur A, or

A est supposée connexe, donc $g \circ f = $ cste sur A
$g = $ cste sur $f(A)$.

VII B) Parties connexes par arcs

Th : $[0,1]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

D/ Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\{0,1\})$, $f(0)=0$ (WLOG)

Soit $A = \{x \in [0,1] \mid \forall y \in [0,x], f(y)=0\}$

$A \neq \emptyset$, soit $c = \sup A$. c est limite de points de A, par $\mathcal{C}^0$, $f(c)=0$.

de plus $\bigcup [0,x_n] \supset [0,c[$, $f=0$ sur $[0,c]$

si $c<1$, $c+\frac{1}{n}$ pour n assez grand n'est pas dans A

et donc $\exists x_n \in]c, c+\frac{1}{n}[: f(x_n) = $

$x_n \to c$, $f(x_n) \to f(c) = 1$ or $f(x_n) \to 0$ Absurde.

Déf : Soit E un e.v.n :
1) On appelle arc (continu) toute application continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vers E

Pr

2) La partie A de E est dite connexe par arcs lorsque :
$\forall (x,y) \in A^2 \; \exists \gamma : [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} A$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

RM : On peut partir de $[a,b]$, $a<b$

Ex : 1) un intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs.
2) Une partie convexe de E est connexe par arcs

D/ Si $a, b \in A$ convexe $\gamma(t) = (1-t)a + tb$

③ Une partie étoilée A de E est est connexe par arcs.

D/ $\exists a \in A, \forall x \in A, [a, x] \subset A$ } déf

Soit $(x, y) \in A^2$ | $\gamma(t) = (1-2t)x + 2ta$ $t \in [0, 1/2]$

| $\gamma(t) = (1 - 2(t - \frac{1}{2}))a + 2(t - \frac{1}{2})y$

γ est $\mathcal{C}^0$ (en $\frac{1}{2}$), $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$

Th : Soit $f : E \to F$ continue. L'image d'une partie A ~~...~~ c.p.a de E est c.p.a

D/ évid | $x' = f(x)$ $f \circ \gamma$
| $y' = f(y)$

Th : Si A est connexe par arcs, A est connexe

D/ Soit $g : A \to \{0, 1\}$ une fct $\mathcal{C}^0$
Soient x et y dans A, comme A est Cpa, il existe $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], A)$ tq $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, on regarde $f = g \circ \gamma$: $[0,1] \to \{0, 1\}$
f est Cste donc $g(x) = g(y)$

Ex : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs

S/ Soit $f = \det$ qui est $\mathcal{C}^0$ (polynôme)

donc $f(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs ✓

Pr | Prop : Soit A une partie de l'evn E
| a) La relation définie par sur A^2 par $x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1], A), \gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$
| est d'équivalence

b- Les classes d'équivalence pour $\sim$ sont CPA.
Voc : On les appelle composantes connexes par arcs.

D/ réflexivité : OK, symétrie si γ joint x à y dans A
On envisage $\gamma(1-t)$

Transitivité $\left| \begin{array}{l} \gamma \text{ joint } x \text{ à } y \text{ dans } A \\ \delta \text{ joint } y \text{ à } z \text{ dans } A \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{ll} t \in [0, 1/2] & \eta(t) = \gamma(2t) \\ t \in [1/2, 1] & \eta(t) = \delta(2t-1) \end{array} \right| \eta$ est $\mathcal{C}^0$ et joint x à z dans A.

b- évident.

Ex : ouvert de $\mathbb{R}$ $\quad \Omega = \overbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[}^{2 \text{ à } 2 \text{ disjoints}}$

Chaque $]a_n, b_n[$ est CPA (car convexe), si $n \neq m$, $b_m < a_n$

$x \in]a_m, b_m[$, $y \in]a_n, b_n[$, $y \not\sim x$

~~Car~~ Si $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \gamma : [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \Omega \quad \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \\ \text{par TVI, } \exists t \in [0,1], \gamma(t) = b_m \text{ , absurde.} \end{array} \right.$

(HP) Props structurelles : ① Une réunion de parties CPA, soit

$\bigcup_{i \in I} A_i$ ayant un pt commun a, est CPA.

D/ Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, on a : si $x \in A_{i_0}$, il relie x à a dans A_{i_0} donc dans $\bigcup_{i \in I} A_i$

~~il relie~~

② Si A_k est connexe par arcs dans l'evn E_k, $A = A_1 \times \dots \times A_m$
est CPA dans $E = E_1 \times \dots \times E_m$

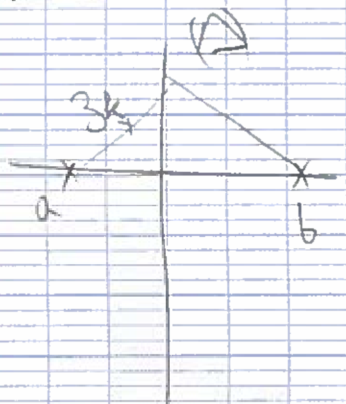
D/ Soit $x, y \in A$, on trouve $\gamma_k : [0,1] \to A_k$, $\gamma_k(0) = x_k$, $\gamma_k(1) = y_k$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ convient.

<u>Exercices</u>: ① Soient $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$. Alors $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ est CPA

D/ Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $a, b \notin \{z_1, \dots, z_p\}$, $a \neq b$

Soit $E = \{m \in \Delta \mid ([a,m] \cup [b,m]) \cap \{z_k\}_{1 \leq k \leq m} \neq \emptyset\}$



E est fini

Fixons $m_0 \in \Delta \setminus E$, $\gamma : [a, m_0] \cup [m_0, b]$ convient

② Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, H un hyperplan de $\mathbb{C}^n$

Mq $\mathbb{C}^n \setminus H$ est CPA

S/ Soit $\varphi \in (\mathbb{C}^n)^*$ tq $H = \operatorname{Ker} \varphi$ | soit $(a, b) \in \mathbb{C}^n$, $\varphi(a), \varphi(b) \neq 0$

Soit $A = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi((1-\lambda)a + \lambda b) = 0\}$

$(1-\lambda)\underbrace{\varphi(a)}_{\neq 0} = \lambda \underbrace{\varphi(b)}_{\neq 0}$ donc il y en a au plus 1, soit μ

Soit γ un arc $[0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{\mu\}$ tq $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$

$\Gamma(t) = (1 - \gamma(t))a + \gamma(t) b$, $\varphi \circ \Gamma$ ne s'annule pas

Γ joint a à b dans $\mathbb{C} \setminus H$

③ E evn réel, $\varphi \in E' \setminus \{0\}$ $H = \{\varphi = 0\}$, $A = E \setminus H$
forme linéaire

composantes connexes

il y a deux CC : $A_1 = \{x \in E \mid \varphi(x) > 0\}$ est convexe donc connexe
$A_{-1} = \{x \in E \mid \varphi(x) < 0\}$

$x \in A_1$, $y \in A_{-1}$, alors $x \not\sim y$ sinon $\exists \gamma : [0,1] \xrightarrow{C^0} A$

On regarde $\varphi \circ \gamma$, qui est C^0 et $\varphi \circ \gamma$ passe de > 0 à < 0

TVI $\Rightarrow \exists t_0$, $\varphi \circ \gamma(t_0) = 0$, alors $\gamma(t_0) \notin A$ absurde

④ Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$
Mq Ω est connexe par arcs polygonaux (= arc affine par morceaux)

classe de a

S/ Soit $a \in \Omega$, on va Mq $\bar{a} = \Omega$ (?)

Soit $A = \bar{a}$ i) A est ouvert ? soit $x \in A$, il existe r, Ω étant ouvert, $r > 0$ tq $B(x,r) \subset \Omega$. Soit $\gamma\ [0,1] \to \Omega$, avec $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = x$
$\subset A$??

on lie les chemins

γ APM Si $y \in B(x,r)$, $\delta = \gamma \cup [x,y]$ | $\delta(t) = \gamma(2t)$ sur $[0,1/2]$
~~$\delta(t) = \dots$~~
$\delta(t) = 2(1-t)x + (2t-1)y$

δ joint a à y dans Ω
donc $y \in A$ et $B(x,r) \subset A$

ii) $\Omega \setminus A$ est ouvert ? si $b \in \Omega \setminus A$, de m̂, $\bar{b}$ est ouverte
et $\bar{b} \subset \Omega \setminus A$ | END : A est ouverte et fermée, $A = \Omega$
dans Ω

C) Application aux fonctions à variables réelles :

Prop : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est CPA $\Longleftrightarrow$ A est un intervalle

D/ ① Connexité ⓘ Soit $x,y \in A$, $\gamma \in \mathcal{C}([0,1],A)$ tq $\begin{cases}\gamma(0)=x\\ \gamma(1)=y\end{cases}$

soit $z \in]x,y[$ $(x<y)$, $c=\sup\underbrace{\{t\in[0,1] \mid \gamma(t)\leq z\}}_{\text{fermé}}$ donc $c\in B$

ainsi $\gamma(c)\leq z$ et si $c<t<1$ il vient $\gamma(t)>z$, $t\downarrow c$ $\gamma(c^+)=\gamma(c)\geq z$

$[x,y]\subset A$

Conséquence : Si I est un intervalle et $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$
$f(I)$ est CPA donc est un intervalle.

Monotonie :

Th : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

f est injective
$\Updownarrow$
f est strict monotone

D/ ⓘ $\mathbb{R}$ est totalement ordonné

ⓘ On introduit $\Delta=\{(x,y)\in I^2 \mid x<y\}$

$\varphi : (x,y) \to f(y)-f(x)$

$\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$

Obs. Δ convexe donc connexe
le fait que f soit injective se traduit par φ ne s'annule pas
$\varphi(\Delta)$ est connexe donc en un intervalle
contenu dans $\mathbb{R}^*$

i) $\varphi(\Delta)\subset]0,+\infty[$ $f\nearrow$

ii) $\varphi(\Delta)\subset]-\infty,0[$ $f\searrow$

Th Soit I un intervalle $\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$

i) On suppose f monotone. Alors f continue $\Updownarrow$ $f(I)$ est un intervalle

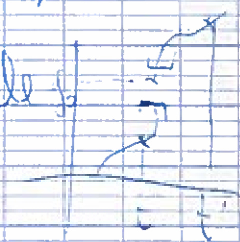
ii) On suppose f continue et injective. Alors $f^{-1} : f(I)\to I$

est $\mathcal{C}^0$. Bref, f est un homeo $I \to f(I)$, en particulier f est ouverte)

i) (⇓) Connexité (⇑) Si f possède un point de discontinuité, $x_0 \in I$, comme $x_0 \in \mathring{I}$, et $f \nearrow$, on a donc $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ et forcément, $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. Soit $y_0 \in]f(x_0^-), f(x_0^+)[\setminus \{f(x_0)\}$

Soit $t < x_0$. $f(t) \leq f(x_0^-) < y_0$, si $t > x_0$, $f(t) \geq f(x_0^+) > y_0$

Bref, $y_0 \notin f(I)$ et $f(I)$ n'est pas un intervalle



ii) f étant continue et injective est strictement monotone

et $f^{-1}(\underbrace{f(I)}_{\text{intervalle}}) = \underbrace{I}_{\text{intervalle}}$ Avec i) f^{-1} est $\mathcal{C}^0$

Exercice: Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ tq $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $f^{\circ p} = \mathrm{Id}$
Mq $f = \mathrm{Id}$

S/ $f^{\circ p} = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ bijective $\Rightarrow f$ est strict monotone
Comme $f(0) = 0$, $f \nearrow$. Supposons $\exists x \in [0,1]$, $f(x) < x$
il vient $f^2(x) < f(x) < x$ $\underbrace{f^{\circ p}(x)}_{x} < \dots < f^{\circ 2}(x) < f(x) < x$

Exercice: ① (CCP 83) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ tq $f \times (1 - f') = 0$
Déterminer f

S/ $A = \{x \in [0,1] \mid f'(x) = 1\}$ A est fermé par $\mathcal{C}^0$ de f'
Soit $a \in A$, Si $f(a) \neq 0$ f ne s'annule pas sur $U \in \mathcal{V}(a)$
$U \subset A$

Si $f(a) = 0$ $f(a+h) = f'(a)h + o(h)$
$= h + h\varepsilon(h) = h(1 + \varepsilon(h))$ car $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Soit $\eta > 0$ tq $\forall h, |h| < \eta$ et ~~a+h~~ $a + h \in [0,1]$ entraîne $|\varepsilon(h)| < 1/2$

Alors $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap [0,1]$, $f(x) = 1$

Ainsi $]a-\eta, a+\eta[\cap [0,1] \subset A$ ouvert et fermé dans le connexe $[0,1]$.

Exercice (homéomo)

① Mq $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Par l'absurde, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un homéo

alors $f : \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\neg \text{connexe}} \to \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}}_{\text{connexe}}$

② Mq S^1 n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$

ABS $f : S^1 \to A$ homéo. A est compact connexe donc c'est un segment

$A = [a,b]$, $a<b$, soit $c = \frac{a+b}{2}$ alors f induit un homéo :

$\underbrace{S^1 \setminus \{f^{-1}(c)\}}_{\text{connexe}} \to \underbrace{A \setminus \{c\}}_{\text{non connexe}}$

RM : $\mathbb{C}$ est non homéo à $\mathbb{C}^*$

③ Soit $f : S^1 \to S^1$ une injection $\mathcal{C}^0$, Mq f est un homéo

S/ Si f est surjective, f est une bijection continue entre compacts donc c'est un homéo

Si $f(S^1) \neq S^1$, quitte à composer par une ~~rotation~~ rotation $-1 \notin f(S^1)$

On aura alors $A \to y$ $\left(\begin{array}{l} S^1 \to]\ldots[\\ x+iy \mapsto \underbrace{2\arctan \frac{y}{x+1}}_{\Theta} \end{array} \right)$

22